5. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Содержание задания:

Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y''(t)+5\cdot y'(t)+N_S\cdot y(t)=N_g,\qquad y(0)=5,\quad y'(0)=10.$$

где N_s – номер по журналу, а N_g – расчетный номер группы (из 1-го задания).

Задачу решить тремя различными методами:

- классическим аналитическим методом (для специальности «Электроника»);
- операторным аналитическим методом (для специальности «Электроника»);
- численным методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Сравнить полученные результаты, построить график решения.

Ns= 6 Ng=24

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=24$$

$$y(0)=5$$

$$y'(0)=10$$

$$y''(\infty)=y'(\infty)=0$$

1. Решим данное дифференциальное уравнение классическим аналитическим методом:

Решаем однородное уравнение:

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2+5p+6=0$$

$$\Rightarrow p_{1.2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4*6}}{2*1}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=\dfrac{-5+\sqrt{1}}{2}\\ p=\dfrac{-5-\sqrt{1}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=\dfrac{-5+1}{2}\\ p=\dfrac{-5-1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=-2\\ p=-3\end{array}\right.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}+\frac{24}{6}=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}+4$$

Найдем первую производную:

$$y'(t)=\left(A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}+4\right)'=-2A_1e^{-2t}-3A_2e^{-3t}$$

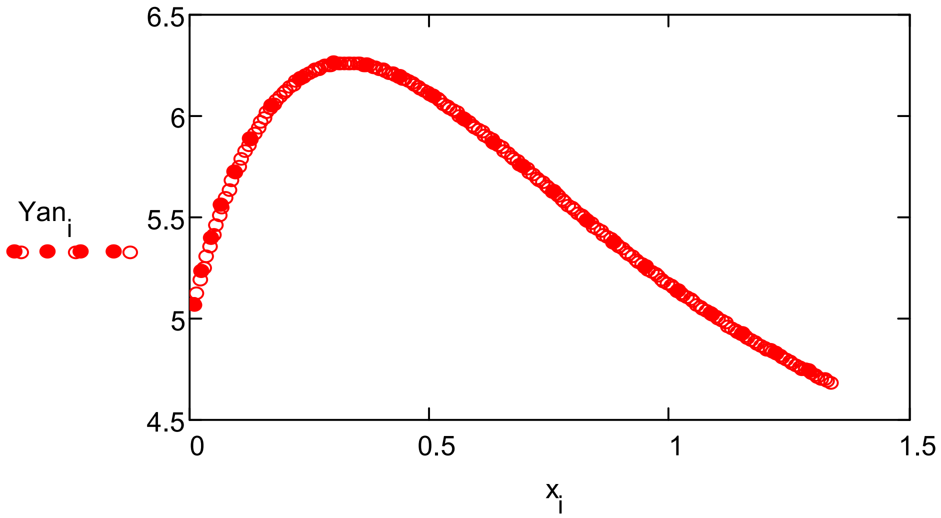
$$\begin{cases}y(0)=y_0(0)+y(\infty)=A_1+A_2+4=5\\ y'(0)=y'_0(0)=-2A_1-3A_2=10\end{cases}$$

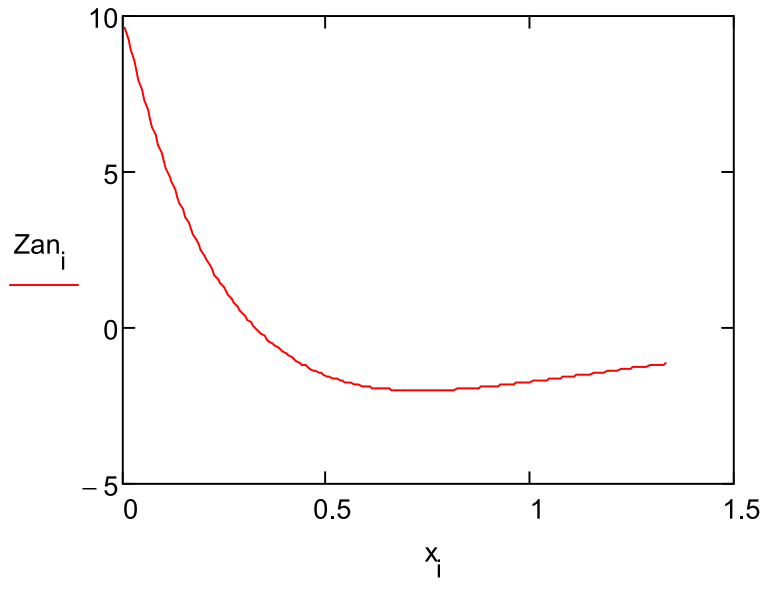
Решаем эту систему:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 5 - 4 = 1 \\ -2A_1 - 3A_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 - A_2 \\ -A_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 13 \\ A_2 = -12 \end{cases}$$

$$y(t) = 13e^{-2t} - 12e^{-3t} + 4$$

$$y'(t) = -26e^{-2t} + 36e^{-3t}$$





2. Операторный метод решения:

$$y''(x) \quad \Rightarrow \quad p^2Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0),$$

$$y'(x) \quad \Rightarrow \quad pY(p) - y(0),$$

$$f(x) \quad \Rightarrow \quad F(p).$$

$y''(x) = p^2Y(p) - 5p - 10$

y'(x)=pY(p)-5

f(x)= $\frac{24}{p}$

$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=24$

$p^2Y(p)-5p-10+5pY(p)-25+6Y(p)=\frac{24}{p}$

$p^2Y(p)+5pY(p)+6Y(p)=5p+35+\frac{24}{p}$

$$Y(p)(p^2+5p+6)=\frac{5p^2+35p+24}{p}$$

$$Y(p)=\frac{5p^2+35p+24}{p(p^2+5p+6)}$$

$(p^2+5p+6)=0$

$$p=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2}$$

P=-2

P=-3

Корни вещественные, значит решение ищем по формуле:

II форма: $Y(p)=\frac{F_1(p)}{pF_2(p)}$.

а) $y(x)=\frac{F_1(0)}{F_2(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{p_k\cdot F_2'(p_k)}\cdot e^{p_k x}$, если корни простые вещественные,

$F_1(p)=5p^2+35p+24$

$F_2(p)=p^2+5p+6$

$F'_2(p)=2p+5$

$$y(x)=\frac{F_1(0)}{F_2(0)}+\frac{F_1(p_1)}{p_1F_2'(p_1)}e^{p_1x}+\frac{F_1(p_2)}{p_2F_2'(p_2)}e^{p_2x}=$$

$$= \frac{5*0^2+35*0+24}{0^2+5*0+6} + \frac{5*(-2)^2+35*(-2)+24}{-2(2*(-2)+5)}e^{-2x} + \frac{5*(-3)^2+35*(-3)+24}{-3(2*(-3)+5)}e^{-3x} =$$

$$= \frac{24}{6} + \frac{-26}{-2}e^{-2x} + \frac{-36}{3}e^{-3x} = 4 + 13e^{-2x} - 12e^{-3x}$$

3. Метод Рунге-Кутта

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\cdot[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4],$$

где

$$f_1 = f(x_k, y_k), \qquad f_2 = f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_k + \frac{h}{2}\cdot f_1),$$

$$f_3 = f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_k + \frac{h}{2}\cdot f_2), \qquad f_4 = f(x_{k+1}, y_k + h\cdot f_3).$$

$$P_{\min} = \min\{-2;-3\} = -3$$

$$\tau = \frac{1}{|-3|} = 0.333$$

$$T(3 \div 4)\cdot 0.333 = 1 \div 1.333$$

$$h = \Delta t = \frac{1.333}{200} = 0.00667$$

$$\begin{cases} y' = z\_\_, y(0) = y_0 = 5 \\ z' = f(y,z),\_ z(0) = y'(0) = y'_0 = 10 \end{cases}$$

Реализация метода в пакете MathCad

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА y''=F(x,y,z) ГДЕ z=y'

$F(x,y,z) := 24 - 4y - 5z$ Функция F(x,y,z)

$h := 0.0375$ $N := 20$ Шаг h и число точек N решения

$$K1(x,y,z) := h\cdot F(x,y,z)$$

$$K2(x,y,z) := h\cdot F\left(x+\frac{h}{2}, y+h\cdot\frac{z}{2}+h\cdot\frac{K1(x,y,h)}{8}, z+\frac{K1(x,y,z)}{2}\right)$$

$$K3(x,y,z) := h\cdot F\left(x+\frac{h}{2}, y+h\cdot\frac{z}{2}+h\cdot\frac{K1(x,y,z)}{8}, z+\frac{K2(x,y,z)}{2}\right)$$

$$K4(x,y,z) := h\cdot F\left(x+h, y+h\cdot z+h\cdot\frac{K3(x,y,z)}{2}, z+K3(x,y,z)\right)$$

Формулы решения методом Рунге-Кутта

$$K(x,y,z) := \frac{K1(x,y,z)+K2(x,y,z)+K3(x,y,z)}{6}$$

$$S(x,y,z) := \frac{K1(x,y,z)+2\cdot K2(x,y,z)+2\cdot K3(x,y,z)+K4(x,y,z)}{6}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

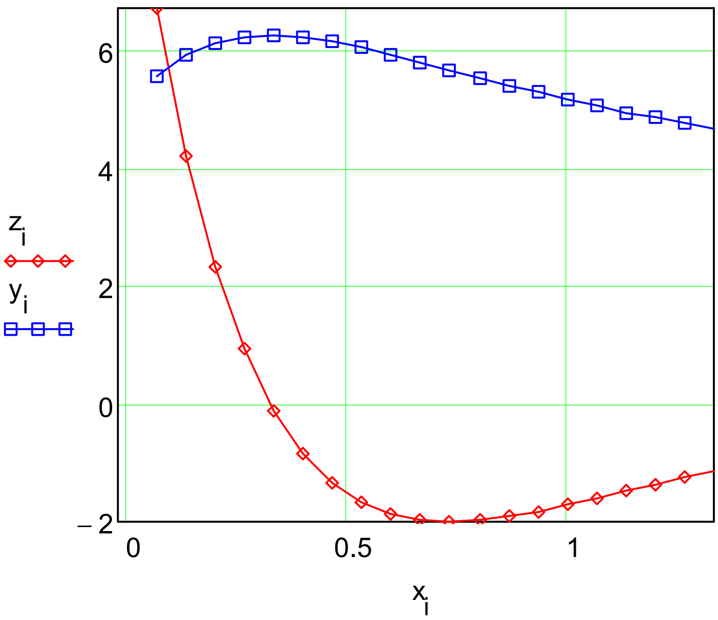
Задание начальных значений x,y и z

$i := 1 .. N$ Задание цикла вычислений

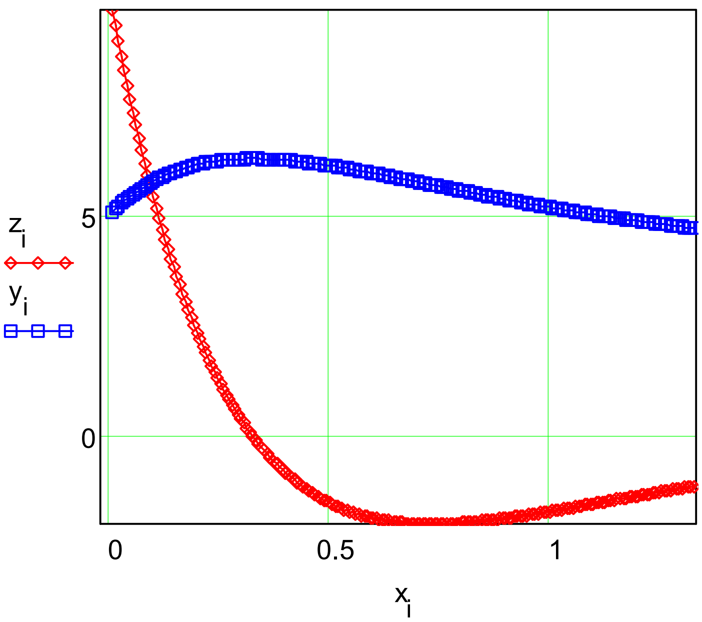
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_{i-1}+h \\ y_{i-1}+h\cdot\left(z_{i-1}+K\left(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}\right)\right) \\ z_{i-1}+S\left(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}\right) \end{bmatrix}$$

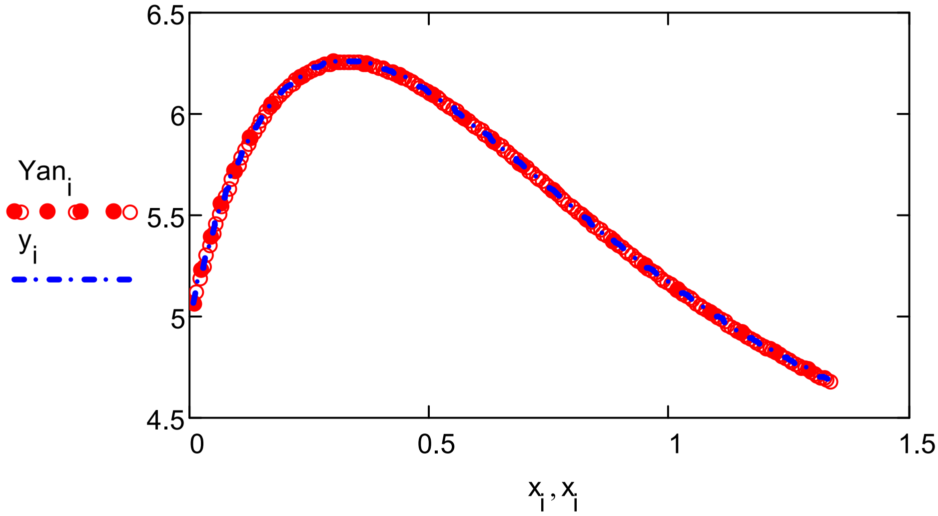
Итерационные формулы метода Рунге-Кутта в векторной форме

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.067 \\ 0.133 \\ 0.2 \\ 0.267 \\ 0.333 \\ 0.4 \\ 0.467 \\ 0.534 \\ 0.6 \\ 0.667 \\ 0.734 \\ 0.8 \\ 0.867 \\ 0.934 \\ 1 \\ 1.067 \\ 1.134 \\ 1.201 \\ 1.267 \\ 1.334 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 5.553 \\ 5.913 \\ 6.128 \\ 6.234 \\ 6.259 \\ 6.226 \\ 6.151 \\ 6.05 \\ 5.93 \\ 5.801 \\ 5.668 \\ 5.535 \\ 5.404 \\ 5.279 \\ 5.161 \\ 5.05 \\ 4.946 \\ 4.851 \\ 4.763 \\ 4.683 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 10 \\ 6.716 \\ 4.211 \\ 2.323 \\ 0.918 \\ -0.109 \\ -0.842 \\ -1.348 \\ -1.68 \\ -1.879 \\ -1.979 \\ -2.006 \\ -1.98 \\ -1.917 \\ -1.828 \\ -1.723 \\ -1.609 \\ -1.49 \\ -1.372 \\ -1.256 \\ -1.145 \end{pmatrix}$$

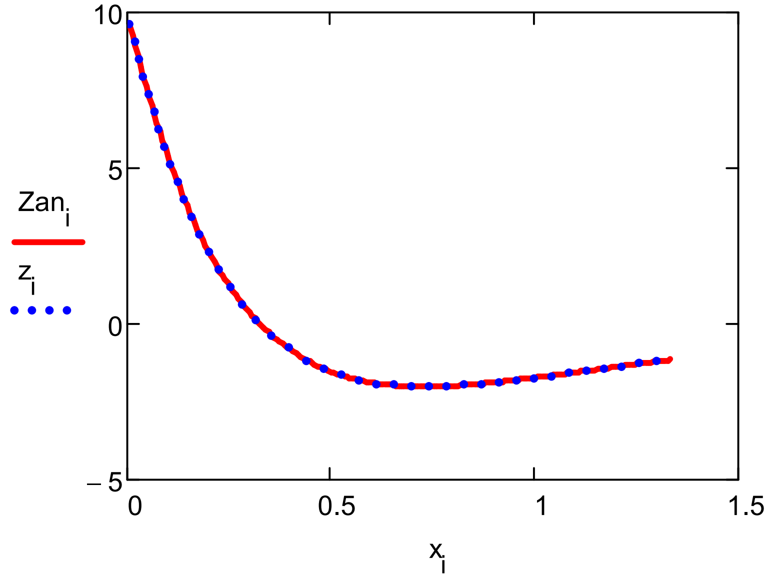


Возьмем N=200
h=1.333/200=0.00667





На одном графике построены аналетически найденное решение дифференциального уравнения и решение найденное с помощью метода Рунге-Кутта
Как можно заметить они полностью совпадают.



Графики аналитической первой производной и производной найденной методом Рунге-Кутта