Задание №6.

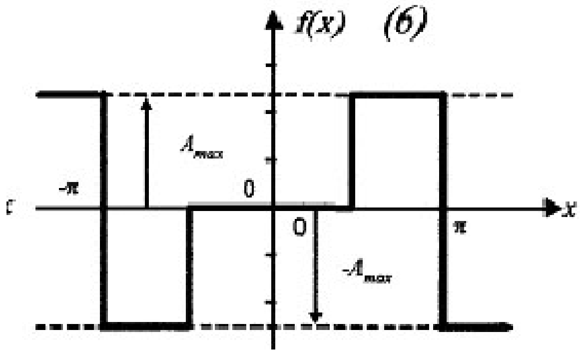
Разложение периодической функции в ряд Фурье.

Номер задания-1 (n_s=4,n_g=24)

Здесь $A_{max} = N_g$ (см. стр. 28), а номер варианта определяется по выражению: $N_{var} = 2 \cdot N_g + N_S - 8 \cdot m$, где N_g – расчетный номер группы (из 1-го задания), N_S – номер студента по журналу, а m – коэффициент, принимающий значение $0,1,2,...$, если $N_{var} > 8$.

Amax=24

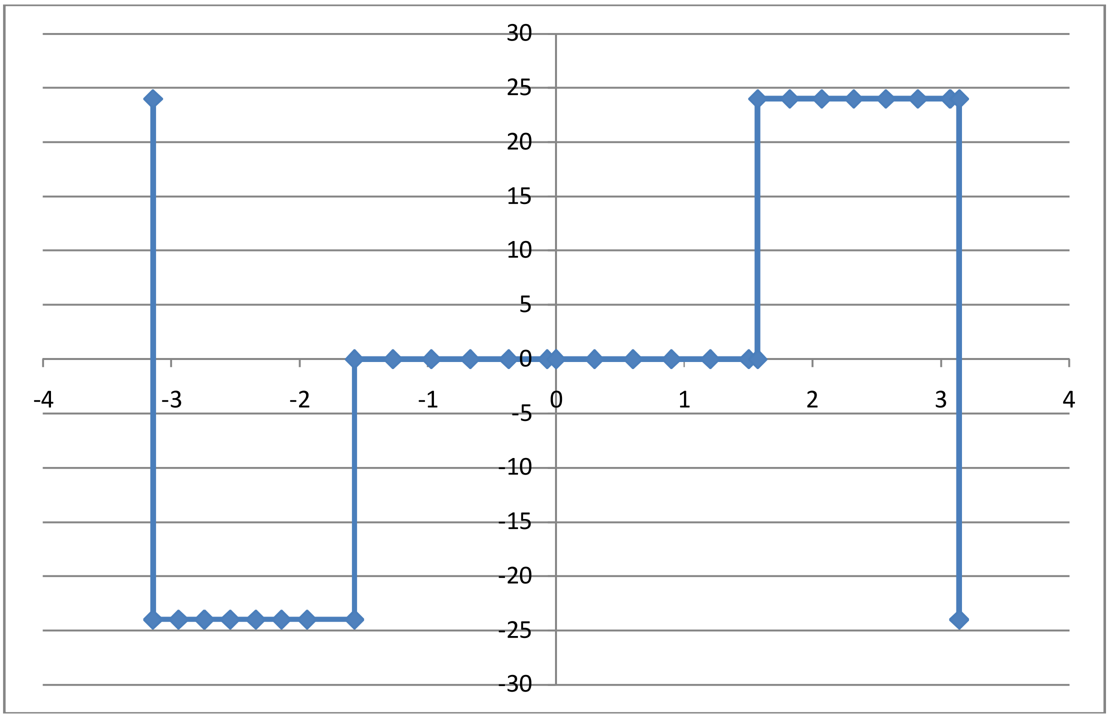
Nvar=2*24+6-8*m=54-8*6=6



На интервале (-π; π) заданная функция имеет следующий вид:

$$f(\omega_0 t) = \begin{cases} -A\max, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -\pi \le \omega_0 t < \dfrac{-\pi}{2} \\ 0, \_\_\_\_\_ -\dfrac{\pi}{2} \le \omega_0 t < \dfrac{\pi}{2} \\ A\max, \_\_\_\_\_\_ \dfrac{\pi}{2} \le \omega_0 t \le \pi \end{cases}$$

$$f(\omega_0 t) = \begin{cases} -24, \_\_\_\_\_\_\_\_ -\pi \le \omega_0 t < \dfrac{-\pi}{2} \\ 0, \_\_\_\_\_ -\dfrac{\pi}{2} \le \omega_0 t < \dfrac{\pi}{2} \\ 24, \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \dfrac{\pi}{2} \le \omega_0 t \le \pi \end{cases}$$



$$\phi(\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{-\pi/2} - A_{\max} d(\omega_0 t) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} A_{\max} d(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-24(-\pi/2 - (-\pi))\right) + \frac{1}{2\pi}\left(24(\pi - \pi/2)\right) = 0$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) d(\omega_0 t), \qquad C_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot Cos(k\omega_0 t) d(\omega_0 t),$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot Sin(k\omega_0 t) d(\omega_0 t), \qquad A_k = \sqrt{C_k^2 + B_k^2}, \qquad \varphi_k = arctg\frac{B_k}{C_k}.$$

Функция не является четной и не четной. Другими словами функция не обладает четностью. Поэтому необходимо искать все коэффициенты.

$$B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t) \cdot \sin(k\omega_0 t) d(\omega_0 t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} -24\sin(\omega_0 t)d(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 24\sin(\omega_0 t)d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi}(-24)(-\cos(\omega_0 t))\Big|_{-\pi/2}^{0} + \frac{1}{\pi}(24)(-\cos(\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-24(-\cos(\frac{-\pi}{2}) + \cos(-\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(24(-\cos(\pi) + \cos(\frac{\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-24}{\pi}(0-1) + \frac{24}{\pi}(1+0) = \frac{48}{\pi}$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi}(-\frac{24}{2})(-\cos(2\omega_0 t))\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}(\frac{24}{2})(-\cos(2\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{24}{2}(-\cos(2*\frac{-\pi}{2}) + \cos(-2\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{24}{2}(-\cos(2\pi) + \cos(\frac{2\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-12}{\pi}(1+1) + \frac{12}{\pi}(-1-1) = \frac{-48}{\pi}$$

$$B_3 = \frac{1}{\pi}(-\frac{24}{3})(-\cos(3\omega_0 t))\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}(\frac{24}{3})(-\cos(3\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{24}{3}(-\cos(\frac{-3\pi}{2}) + \cos(-3\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{24}{3}(-\cos(3\pi) + \cos(\frac{3\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-8}{\pi}(0-1) + \frac{8}{\pi}(1+0) = \frac{16}{\pi}$$

Так как функция не четная (симметрична относительно начала координат), то согласно правилу:

2. Если функция нечетная (симметрия относительно начала координат), то все косинусные коэффициенты $C_k = 0$ и постоянная составляющая $A_0 = 0$.

Проверим так ли это:

$$C_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t)d(\omega_0 t)$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} -24\cos(\omega_0 t)d(\omega_0 t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 24\cos(\omega_0 t)d(\omega_0 t) = \frac{1}{\pi}(-24)(\sin(\omega_0 t))\Big|_{\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}(24)(\sin(\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-24(\sin(\frac{-\pi}{2}) - \sin(-\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(24(\sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-24}{\pi}(-1-0) + \frac{24}{\pi}(0-1) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi}(-\frac{24}{2})(\sin(2\omega_0 t))\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}(\frac{24}{2})(\sin(2\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-12(\sin(-\pi) - \sin(-2\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(12(\sin(2\pi) - \sin(2\frac{\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-12}{\pi}(0-0) + \frac{12}{\pi}(0-0) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi}(\frac{-24}{3})(\sin(3\omega_0 t))\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{1}{\pi}(\frac{24}{3})(\sin(3\omega_0 t))\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{24}{3}(\sin(\frac{-3\pi}{2}) - \sin(-3\pi))\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{24}{3}(\sin(3\pi) - \sin(\frac{3\pi}{2}))\right) =$$

$$= \frac{-8}{\pi}(1-0) + \frac{8}{\pi}(0-(-1)) = 0$$

Найдем Ак: так как все Ск=0, то Ак=|Вк|

$$A1 = \frac{48}{\pi}$$

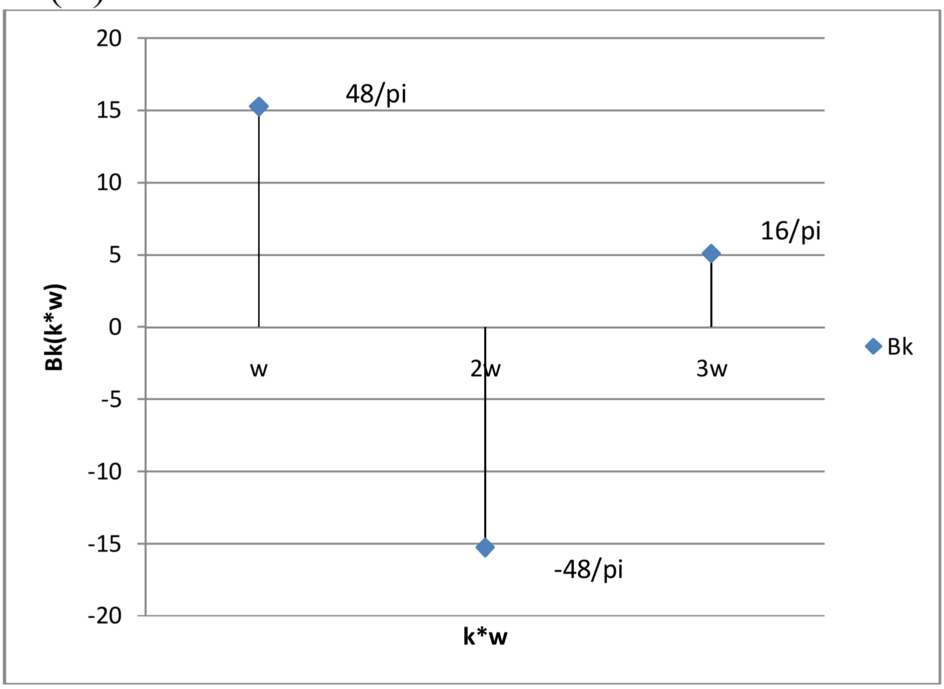
$$A2 = \frac{48}{\pi}$$

$$A3 = \frac{16}{\pi}$$

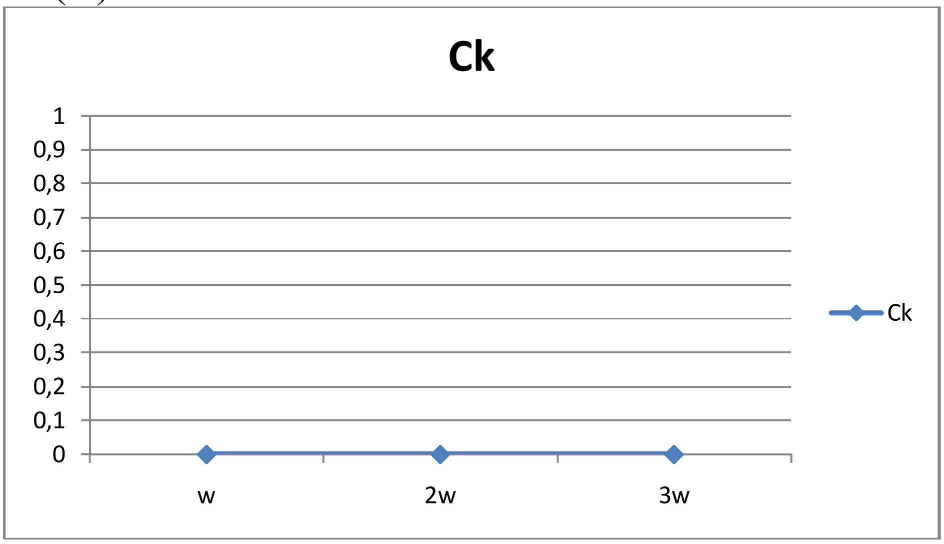
Найдем φk=arctan(Bk/Ck)=90°

Построим графики гармоник:

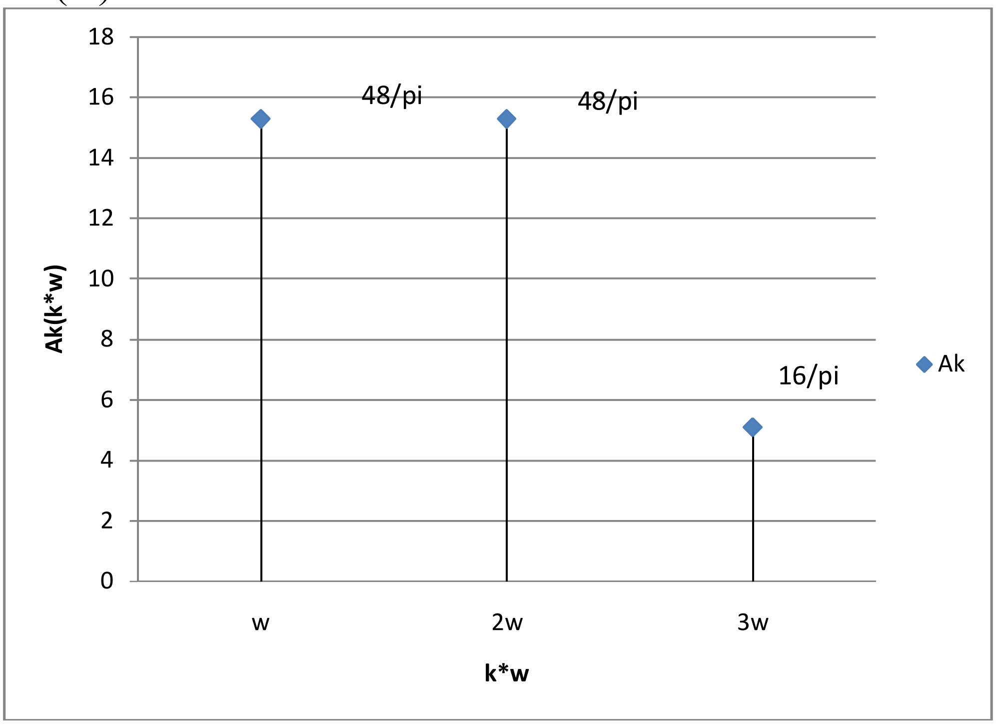
Bk(w)



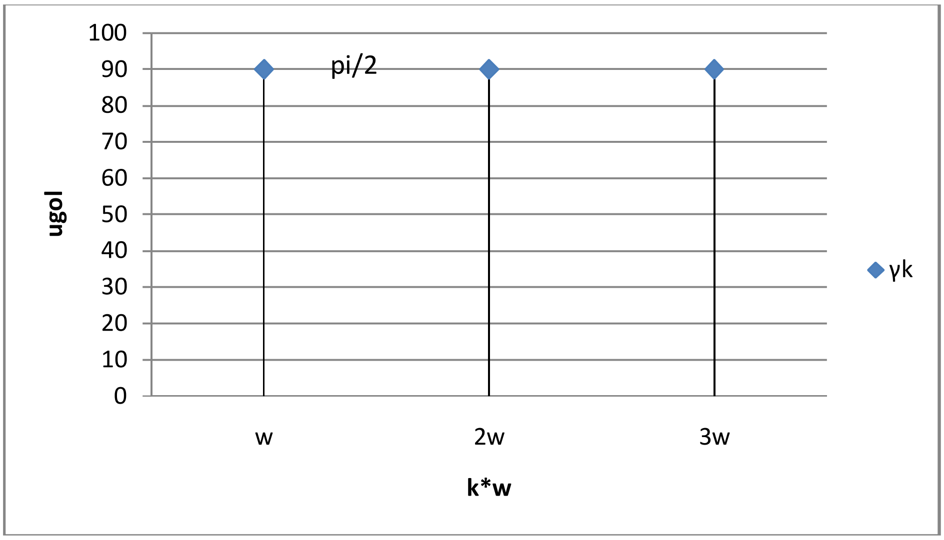
Ck(w)


Ck
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
w
2w
3w
Ck

Ak(w):


18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Ak(k*w)
48/pi
48/pi
16/pi
w
2w
3w
k*w
Ak

φk(w):



Общее выражение для разложения:

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot Cos(k\omega_0 t)+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot Sin(k\omega_0 t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot Cos(k\omega_0 t+\varphi_k),$$

где $\omega_0={}^{2\pi}\!/_{T}$ – основная частота. T – период,

T=2π

$$f(t)=0+\frac{48}{\pi}\sin(\omega_0 t)-\frac{48}{\pi}\sin(2\omega_0 t)+\frac{16}{\pi}\sin(3\omega_0 t)$$

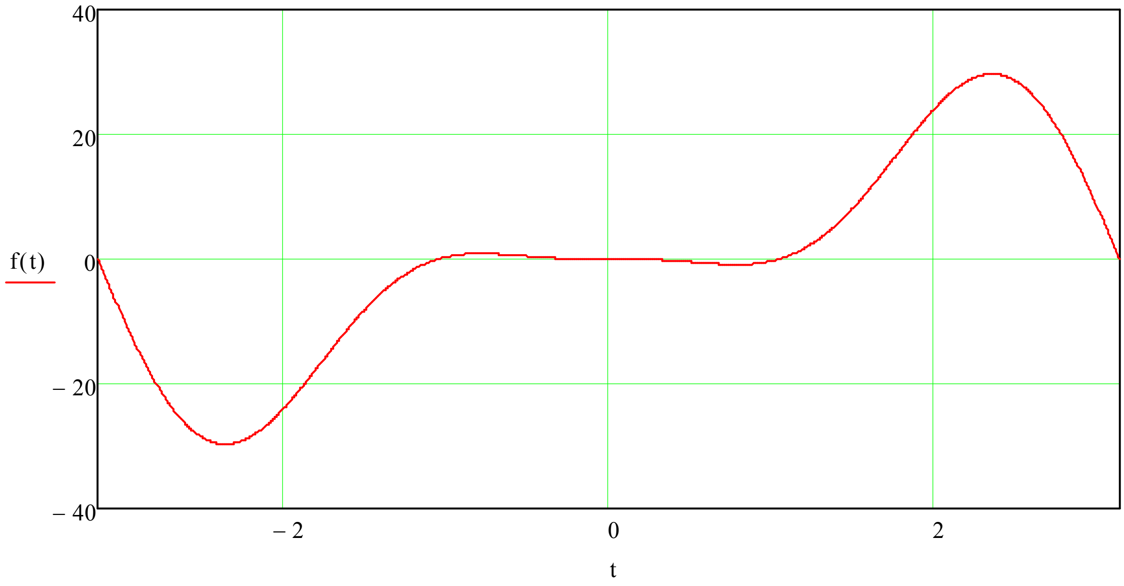


Рис.7.График разложенной функции в ряд Фурье.

Совместный график исходного сигнала и разложенного в ряд Фурье: