Найти предел 4-го типа

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}$ делаем замену $x^3=u$

$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{5u-2}{5u+1}\right)^{-6u}$ избавляемся от отрицательной степени $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m}$ тогда

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{5u-2}{5u+1}\right)^{-6u}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)^{6u}$$

Воспользовавшись правилом $\lim\limits_{x\to\infty}t^m=\lim\limits_{x\to\infty}e^{m\ln t}$ получаем:

$$\lim_{u\to\infty}\left(\frac{5u-2}{5u+1}\right)^{-6u}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)^{6u}=\lim_{u\to\infty}e^{6u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}$$

По правилу $\lim\limits_{x\to\infty}e^{m\ln t}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}m\ln t}$ переходим к:

$\lim\limits_{u\to\infty}e^{6u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}=e^{\lim\limits_{u\to\infty}6u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}$ по правилу $\begin{array}{l}\lim(cV)=c\lim(V)\\ c-const\end{array}$

Получаем:

$e^{\lim\limits_{u\to\infty}6u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}=e^{6\lim\limits_{u\to\infty}u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}$ воспользуемся теперь тождеством $\lim u\ln V=\lim\frac{\ln V}{(1/u)}$

$e^{6\lim\limits_{u\to\infty}u\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}=e^{6\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{5u+1}{5u-2}\right)}{1/u}}$ сделаем замену v=1/u

$=e^{6\lim\limits_{v\to0}\frac{\ln\left(\frac{5v^{-1}+1}{5v^{-1}-2}\right)}{v}}=e^{6\lim\limits_{v\to0}\frac{\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)}{v}}$ рассчитаем теперь предел, находящийся в степени

$$\lim_{v\to 0}\frac{\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)}{v}$$

имеем неопределенность типа «0/0» применяем правило Лапиталя

$$\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)=\frac{1}{\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)}*\frac{d}{dx}\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)=\left(\frac{5-2v}{5+v}\right)\left(\frac{(5+v)'(5-2v)-(5+v)(5-2v)'}{(5-2v)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{5-2v}{5+v}\right)\left(\frac{1(5-2v)+2(5+v)}{(5-2v)^2}\right)=\left(\frac{5-2v}{5+v}\right)\left(\frac{15}{(5-2v)^2}\right)=\left(\frac{15}{(5+v)(5-2v)}\right)$$

$$g(x)=v$$

$$g'(x)=v'=1$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{\frac{15}{(5+v)(5-2v)}}{1}=\lim_{v\to 0}\frac{15}{(5+v)(5-2v)}=$$

$$=\frac{15}{(5+0)(5-2*0)}=\frac{15}{5*5}=\frac{3}{5}$$

Тогда исходный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}=e^{6\lim\limits_{v\to 0}\frac{\ln\left(\frac{5+v}{5-2v}\right)}{v}}=e^{6*3/5}=e^{18/5}$$