

Исключительно для ознакомительной цели.

Задача распределения ресурсов

Задание:

Требуется определить, в каком количестве следует выпускать продукцию четырех типов, для изготовления которой требуются ресурсы четырех видов: трудовые, сырьевые, станочные и финансовые. Необходимо определить ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль, получить оптимальное решение двойственной задачи ЛП, осуществить анализ оптимального решения. Количество ресурса каждого вида, необходимое для производства продукции каждого типа приведены в таблице:

Ресурсы	Потреб1	Потребит2	Потреб3	Потреб4	кол-во запаса
Труд	10	10	13	11	240
Сырье	120	125	115	100	5150
Станки	51	38	25	64	350
Финансы	85	50	46	98	1725
Прибыль	17	19	17	15	

Решение:

Составим экономико-математическую модель

$$F(x) = 17x_1 + 19x_2 + 17x_3 + 15x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 11x_4 \leq 240 \\ 120x_1 + 125x_2 + 115x_3 + 100x_4 \leq 5150 \\ 51x_1 + 38x_2 + 25x_3 + 64x_4 \leq 350 \\ 85x_1 + 50x_2 + 46x_3 + 98x_4 \leq 1725 \\ x_i \geq 0, i = 1..4 \end{cases}$$

Двойственная задача

$$Z(u) = 240u_1 + 5150u_2 + 350u_3 + 1725u_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 10u_1 + 120u_2 + 51u_3 + 85u_4 \geq 17 \\ 10u_1 + 125u_2 + 38u_3 + 50u_4 \geq 19 \\ 13u_1 + 115u_2 + 25u_3 + 46u_4 \geq 17 \\ 11u_1 + 100u_2 + 64u_3 + 98u_4 \geq 15 \\ u_i \geq 0, i = 1..4 \end{cases}$$

Исключительно для ознакомительной цели.

Заполним 1-ую симплекс таблицу с учетом 2-ой и третьей теорем двойственности:

		u_5	u_6	u_7	u_8	$Z(u)$	оценка
		-x1	-x2	-x3	-x4	b_j	
-u1	x_5	10	10	13	11	240	240/10=24
-u2	x_6	120	125	115	100	5150	5150/125=41.2
-u3	x_7	51	38	25	64	350	350/38=9.211
-u4	x_8	85	50	46	98	1725	1725/50=34.5
C_i	$F(x)$	-17	-19	-17	-15	0	

Так как в исходной таблице все $b_j > 0$, то искомым разрешающим элементом будет находиться в столбце наибольшего по модулю отрицательного коэффициента целевой функции. В данном случае – в столбце -x₂

Находим оценочные отношения и записываем их в последний столбец симплексной таблицы, затем выбираем строку, в которой оценочное отношение минимальное:

Из расчетов следует, что разрешающим элементом будет a_{32} .

Меняем всю симплексную таблицу относительно этого элемента.

На месте разрешающего элемента запишем:

$$a'_{32} = \frac{1}{a_{32}} = \frac{1}{38} = 0.026$$

Новые коэффициенты в строке

Все элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент

$$b'_3 = \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{350}{38} = 9.21$$

$$a'_{31} = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{51}{38} = 1.342$$

$$a'_{33} = \frac{a_{33}}{a_{32}} = \frac{25}{38} = 0.658$$

$$a'_{34} = \frac{a_{34}}{a_{32}} = \frac{64}{38} = 1.684$$

Исключительно для ознакомительной цели.

Все элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и меняем знак.

$$c_2' = -\frac{c_2}{a_{32}} = -\frac{(-19)}{38} = 0,5$$

$$a_{12}' = -\frac{a_{12}}{a_{32}} = -\frac{10}{38} = -0.263$$

$$a_{22}' = -\frac{a_{22}}{a_{32}} = -\frac{125}{38} = -3.289$$

$$a_{42}' = -\frac{a_{42}}{a_{32}} = -\frac{50}{38} = -1.316$$

Все остальные элементы симплекс таблицы рассчитываем по формуле:

$$a_{11}' = \frac{10*38 - 51*10}{38} = -3.421$$

$$a_{21}' = \frac{120*38 - 51*125}{38} = -47.76$$

$$a_{41}' = \frac{85*38 - 51*50}{38} = 17.89$$

$$c_1' = \frac{-17*38 - 51*(-19)}{38} = 8.5$$

$$a_{13}' = \frac{13*38 - 25*10}{38} = 6.421$$

$$a_{23}' = \frac{115*38 - 25*125}{38} = 32.76$$

$$a_{43}' = \frac{46*38 - 25*50}{38} = 13.11$$

$$c_3' = \frac{-17*38 - 25*(-19)}{38} = -4.5$$

$$a_{14}' = \frac{11*38 - 64*10}{38} = -5.842$$

$$a_{24}' = \frac{100*38 - 64*125}{38} = -110.5$$

$$a_{44}' = \frac{98*38 - 64*50}{38} = 13.79$$

$$c_4' = \frac{-15*38 - 64*(-19)}{38} = 17$$

Исключительно для ознакомительной цели.

$$b'_1 = \frac{240 \cdot 38 - 350 \cdot 10}{38} = 147.895$$

$$b'_2 = \frac{5150 \cdot 38 - 350 \cdot 125}{38} = 3998.68$$

$$b'_4 = \frac{1725 \cdot 38 - 350 \cdot 50}{38} = 1264.47$$

$$Z' = \frac{0 \cdot 38 - 350 \cdot (-19)}{38} = 175$$

Заполняем новую таблицу:

		u_5	U_3	u_7	u_8	$Z(u)$	оценка
		$-x_1$	$-x_7$	$-x_3$	$-x_4$	b_j	
$-u_1$	x_5	-3,421	-0,263	6,421	-5,842	147,895	$147.895/6.421=23.03$
$-u_2$	x_6	-47,76	-3,289	32,76	-110,5	3998,68	$3998.68/32.76=122.04$
$-u_6$	x_2	1,342	0,026	0,658	1,684	9,21053	$9.21/0.658=14$
$-u_4$	x_8	17,89	-1,316	13,11	13,79	1264,47	$1264.47/13.11=96.5$
C_i	$F(x)$	8,5	0,5	-4,5	17	175	

Новое опорное решение

$$X_2 = (0; 9.21; 0; 0; 147.895; 3998.68; 0; 1264.47)$$

$$F_2(x) = 0 \cdot 22 + 8.33 \cdot 24 + 0 \cdot 22 + 0 \cdot 20 = 200$$

Решение спорное но не оптимальное, т.к. в строке коэффициентов целевой функции всё ещё есть отрицательный коэффициент $C_3 = -4.5$ соответствует столбцу 3 и вектору x_3 - разрешающий столбец (вводим его в базис)

Найдём разрешающую строку (по наименьшему значению в столбце оценок)

$\text{Min} \{ 23.03; 122.04; 14; 96.5 \} = 14$ соответствует строке 3 и вектору x_2 (разрешающая строка) – выводим эту строку из базиса

$$a_{33} = 0.658$$

меняем x_2 на x_3 и переходим к новой симплекс-таблице

Исключительно для ознакомительной цели.

		u_5	U_3	U_6	u_8	$Z(u)$
		$-x_1$	$-x_7$	$-x_2$	$-x_4$	b_j
$-u_1$	x_5	-16,52	-0,52	-9,76	-22,28	58
$-u_2$	x_6	-114,6	-4,6	-49,8	-194,4	3540
$-u_7$	x_3	2,04	0,04	1,52	2,56	14
$-u_4$	x_8	-8,84	-1,84	-19,92	-19,76	1081
C_i	$F(x)$	17,68	0,68	6,84	28,52	238

Находим пробное решение

$$x_1 = 0 \quad x_5 = 58$$

$$x_7 = 0 \quad x_6 = 3540$$

$$x_2 = 0 \quad x_3 = 14$$

$$x_4 = 0 \quad x_8 = 1081$$

$$x^*_{\text{opt}} = (0; 0; 14; 0; 58; 3540; 0; 1081)$$

$$F_{\text{opt}}(x) = 17*0 + 19*0 + 17*14 + 15*0 = 238$$

Таким образом в рассматриваемом производстве для получения максимальной прибыли в размере 238 усл.единиц необходимо производить только Продукт. №3 в размере

$$x_3 = 14 \text{ шт.}, \text{ а Прод. 1, Прод. 2, Прод. 4} (x_1=0, x_2=0, x_4=0)$$

не производить вовсе (убыточное производство).

По результатам оптимального решения прямой задачи найдем оптимальное решение двойственной задачи

$$u_1 = 0 \quad u_3 = 0,68$$

$$u_2 = 0 \quad u_5 = 17.68$$

$$u_7 = 0 \quad u_6 = 6.84$$

$$u_4 = 0 \quad u_8 = 28.52$$

$$U^* = (0; 0; 0.68; 0; 17.68; 6.84; 0; 28.52)$$

$$Z^*(u) = 240*0 + 5150*0 + 350*0.68 + 1725*0 = 238$$