

В m пунктах отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах соответственно $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц. Этот груз необходимо доставить потребителям $B_1, B_2, \dots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i -го

($i=1,2, \dots, m$) пункта отправления в j -й ($j=1,2, \dots, n$) пункт назначения. Требуется составить план перевозок (сколько груза и куда доставить), который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.

Условия задачи расположим в таблицу, вписывая в клетки количество перевозимого из A_i в B_j груза $X_{ij} \geq 0$ и соответствующие тарифы c_{ij} :

Поставщик	Потреб. B_1	Потреб. B_2	Потреб. B_3	Потреб. B_4	Запас груза a_i
Производитель A_1	x_{11} 23	x_{12} 16	x_{13} 33	x_{14} 19	950
Производитель A_2	x_{21} 16	x_{22} 26	x_{23} 13	x_{24} 33	4530
Производитель A_3	x_{31} 10	x_{32} 13	x_{33} 22	x_{34} 16	3700
Потребность в грузе b_j	1860	2280	2450	2590	9180

Составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются. Задачу решить распределительным методом, получив допустимый план методами "северо-западного угла", или минимального элемента

Транспортная задача имеет закрытый тип, так как суммарный запас груза равен суммарным потребностям.

Находим опорный план по правилу минимального элемента:

Введем некоторые обозначения:

A_i^* - излишек нераспределенного груза от поставщика A_i

B_j^* - недостача в поставке груза потребителю B_j

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,1).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_3^*=3700$ и $B_1^*=1860$

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,3).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_2^*=4530$ и $B_3^*=2450$

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (3,2).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_3^*=1840$ и $B_2^*=2280$

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,2).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_1^*=950$ и $B_2^*=440$

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (1,4).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_1^*=510$ и $B_4^*=2590$

Находим незанятую клетку с минимальным тарифом: (2,4).

Помещаем туда меньшее из чисел $A_2^*=2080$ и $B_4^*=2080$

Поставщик	Потреб. B_1	Потреб. B_2	Потреб. B_3	Потреб. B_4	Запас груза a_i
Производитель A_1	23	16 - 440	33	19 + 510	950
Производитель A_2	16 +	26	13 2450	33 - 2080	4530
Производитель A_3	10 - 1860	13 + 1840	22	16	3700
Потребность в грузе b_j	1860	2280	2450	2590	9180

Целевая функция $F=16*440+19*510+13*2450+33*2080+10*1860+13*1840=159740$

Решаем задачу распределительным методом:

Этап 1

Определим значения оценок S_{ij} для всех свободных клеток.

Для этого строим цикл для каждой свободной клетки и, перемещаясь по клеткам цикла, складываем тарифы клеток. При этом тарифы в нечетных клетках берутся со знаком "плюс", в четных - со знаком "минус".

$$S_{1,1} = c_{1,1} - c_{1,2} + c_{3,2} - c_{3,1} = 23 - 16 + 13 - 10 = 10.$$

$$S_{1,3} = c_{1,3} - c_{1,4} + c_{2,4} - c_{2,3} = 33 - 19 + 33 - 13 = 34.$$

$$S_{2,1} = c_{2,1} - c_{2,4} + c_{1,4} - c_{1,2} + c_{3,2} - c_{3,1} = 16 - 33 + 19 - 16 + 13 - 10 = -11.$$

$$S_{2,2} = c_{2,2} - c_{2,4} + c_{1,4} - c_{1,2} = 26 - 33 + 19 - 16 = -4.$$

$$S_{3,3} = c_{3,3} - c_{3,2} + c_{1,2} - c_{1,4} + c_{2,4} - c_{2,3} = 22 - 13 + 16 - 19 + 33 - 13 = 26.$$

$$S_{3,4} = c_{3,4} - c_{3,2} + c_{1,2} - c_{1,4} = 16 - 13 + 16 - 19 = 0.$$

Если имеется несколько клеток с одним и тем же наименьшим значением оценки, то из них выбирается клетка, имеющая наименьший тариф. Наиболее перспективной является клетка (2,1). Для нее оценка равна -11.

Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

Среди оценок помеченных – находим наименьшую перевозку:

$$\Omega = \min\{2080; 440; 1860\} = 440$$

Перемещаем по циклу груз величиной в 440 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

Поставщик	Потреб. B_1	Потреб. B_2	Потреб. B_3	Потреб. B_4	Запас груза a_i
Производитель A_1	23	16	33	19 950	950
Производитель A_2	16 440 +	26	13 2450	33 1640 -	4530
Производитель A_3	10 1420 -	13 2280	22	16 +	3700
Потребность в грузе b_j	1860	2280	2450	2590	9180

Целевая функция $F=19*950+13*2450+33*1640+16*440+10*1420+13*2280= 154900$

$$F1-F2=159740 -154900 =4840$$

Значение целевой функции изменилось на 4840 единиц по сравнению с предыдущим этапом. План улучшился

Этап 2

Определим значения оценок S_{ij} для всех свободных клеток.

Для этого строим цикл для каждой свободной клетки и, перемещаясь по клеткам цикла, складываем тарифы клеток. При этом тарифы в нечетных клетках берутся со знаком "плюс", в четных - со знаком "минус".

$$S_{1,1} = c_{1,1}-c_{1,4}+c_{2,4}-c_{2,1} =23-19+33-16= 21.$$

$$S_{1,2} = c_{1,2}-c_{1,4}+c_{2,4}-c_{2,1}+c_{3,1}-c_{3,2} =16-19+33-16+10-13= 11.$$

$$S_{1,3} = c_{1,3}-c_{1,4}+c_{2,4}-c_{2,3} =33-19+33-13= 34.$$

$$S_{2,2} = c_{2,2}-c_{2,1}+c_{3,1}-c_{3,2} =26-16+10-13= 7.$$

$$S_{3,3} = c_{3,3}-c_{3,1}+c_{2,1}-c_{2,3} =22-10+16-13= 15.$$

$$S_{3,4} = c_{3,4}-c_{3,1}+c_{2,1}-c_{2,4} =16-10+16-33= -11.$$

Если имеется несколько клеток с одним и тем же наименьшим значением оценки, то из них выбирается клетка, имеющая наименьший тариф. Наиболее перспективной является клетка (3,4). Для нее оценка равна -11.

Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

Среди оценок помеченных – находим наименьшую перевозку:

$$\Omega=\min\{1420; 1640\}= 1420$$

Перемещаем по циклу груз величиной в 1420 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

Поставщик	Потреб. B_1	Потреб. B_2	Потреб. B_3	Потреб. B_4	Запас груза a_i
Производитель A_1	23	16	33	19 950	950
Производитель A_2	16 1860	26 +	13 2450	33 - 220	4530
Производитель A_3	10	13 - 2280	22	16 + 1420	3700
Потребность в грузе b_j	1860	2280	2450	2590	9180

Целевая функция $F=19*950+16*1860+13*2450+33*220+13*2280+16*1420= 139280$

$F2-F3=154900-139280 =15620$

Значение целевой функции изменилось на 15620 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Этап 3

Определим значения оценок S_{ij} для всех свободных клеток.

Для этого строим цикл для каждой свободной клетки и, перемещаясь по клеткам цикла, складываем тарифы клеток. При этом тарифы в нечетных клетках берутся со знаком "плюс", в четных - со знаком "минус".

$$S_{1,1} = c_{1,1}-c_{1,4}+c_{2,4}-c_{2,1} = 23-19+33-16= 21.$$

$$S_{1,2} = c_{1,2}-c_{1,4}+c_{3,4}-c_{3,2} = 16-19+16-13=0.$$

$$S_{1,3} = c_{1,3}-c_{1,4}+c_{2,4}-c_{2,3} = 33-19+33-13=34.$$

$$S_{2,2} = c_{2,2}-c_{2,4}+c_{3,4}-c_{3,2} = 26-33+16-13=-4.$$

$$S_{3,1} = c_{3,1}-c_{3,4}+c_{2,4}-c_{2,1} = 10-16+33-16=11.$$

$$S_{3,3} = c_{3,3}-c_{3,4}+c_{2,4}-c_{2,3} = 22-16+33-13=26.$$

Если имеется несколько клеток с одним и тем же наименьшим значением оценки, то из них выбирается клетка, имеющая наименьший тариф. Наиболее перспективной является клетка (2,2). Для нее оценка равна -4.

Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

Среди оценок помеченных – находим наименьшую перевозку:

$$\Omega=\min\{2280; 220\}=220$$

Перемещаем по циклу груз величиной в 220 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

Поставщик	Потреб. B_1	Потреб. B_2	Потреб. B_3	Потреб. B_4	Запас груза a_i
Производитель A_1	23	16	33	19 950	950
Производитель A_2	16 1860	26 220	13 2450	33	4530
Производитель A_3	10	13 2060	22	16 1640	3700
Потребность в грузе b_j	1860	2280	2450	2590	9180

Целевая функция $F=19*950+16*1860+26*220+13*2450+13*2060+16*1640= 138400$

$$F_3-F_4=139280- 138400 =880$$

Значение целевой функции изменилось на 880 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Этап 4

Определим значения оценок S_{ij} для всех свободных клеток.

Для этого строим цикл для каждой свободной клетки и, перемещаясь по клеткам цикла, складываем тарифы клеток. При этом тарифы в нечетных клетках берутся со знаком "плюс", в четных - со знаком "минус".

$$S_{1,1} = c_{1,1}-c_{1,4}+c_{3,4}-c_{3,2}+c_{2,2}-c_{2,1} =23-19+16-13+26-16= 17.$$

$$S_{1,2} = c_{1,2}-c_{1,4}+c_{3,4}-c_{3,2} =16-19+16-13= 0.$$

$$S_{1,3} = c_{1,3}-c_{1,4}+c_{3,4}-c_{3,2}+c_{2,2}-c_{2,3} =33-19+16-13+26-13= 30.$$

$$S_{2,4} = c_{2,4}-c_{2,2}+c_{3,2}-c_{3,4} =33-26+13-16= 4.$$

$$S_{3,1} = c_{3,1}-c_{3,2}+c_{2,2}-c_{2,1} =10-13+26-16= 7.$$

$$S_{3,3} = c_{3,3}-c_{3,2}+c_{2,2}-c_{2,3} =22-13+26-13= 22.$$

Так как все оценки $S_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным.
Транспортная задача решена.

Целевая функция $F= 138400$

Экономия по сравнению с первоначальным планом составила:

$$159740-138400=21340$$