

Скачано с сайта www.matpom.narod.ru
 Исключительно для ознакомительной цели.
Транспортная задача.

В m пунктах отправления A_1, A_2, \dots, A_m сосредоточен однородный груз в количествах соответственно a_1, a_2, \dots, a_m единиц. Этот груз необходимо доставить потребителям B_1, B_2, \dots, B_n , спрос которых выражается величинами b_1, b_2, \dots, b_n единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i -го

($i=1,2, \dots, m$) пункта отправления в j -й ($j=1,2, \dots, n$) пункт назначения. Требуется составить план перевозок (сколько груза и куда доставить), который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.

Условия задачи расположим в таблицу, вписывая в клетки количество перевозимого из A_i в B_j груза $X_{ij} \geq 0$ и соответствующие тарифы c_{ij} :

Поставщик	Потреб. A_1	Потреб. A_2	Потреб. A_3	Потреб. A_4	Запас груза b_j
Производ. B_1	32	19	47	21	675
Производ.	19	34	17	47	3045
Производ. B_3	15	17	23	19	2550
Потребность в грузе a_i	1290	1545	1675	1760	

Проверим, какого типа задача - открытая или закрытая. Сравним суммарные потребности потребителей и суммарные запасы производителей:

- суммарные потребности $\sum_{i=1}^4 a_i = 1290 + 1545 + 1675 + 1760 = 6270$

- суммарные запасы $\sum_{j=1}^3 b_j = 675 + 3045 + 2550 = 6270$.

Потребности и запасы совпадают, следовательно, мы имеем транспортную задачу закрытого типа.

Для нахождения оптимального плана поставок используем метод потенциалов. Недостатком данного метода является то, что необходимо иметь любой допустимый опорный план. Найдем опорный план, используя метод «минимального тарифа».

Метод «минимального тарифа»

Поставщик (b_j)	Запас	Потребители (a_i) и их спрос			
		1	2	3	4
		1290	1545	1675	1760
1	675	32 -----	19 ----	47 ----	21 675
2	3045	19 ----	34 285	17 1675	47 1085
3	2550	15 1290	17 1260	23 ----	19 ----

$$X_{31} = \min\{2550; 1290\} = 1290.$$

$$x_{23} = \min\{3045; 1675\} = 1675$$

$$X_{32} = \min\{(2550 - 1290); 1545\} = \min\{1260; 1545\} = 1260.$$

$$X_{14} = \min\{675; 1760\} = 675$$

$$X_{22} = \min\{(3045 - 1675); (1545 - 1260)\} = \min\{1370; 285\} = 285$$

$$X_{24} = \min\{(1370 - 285); (1760 - 675)\} = \min\{1085; 1085\} = 1085$$

Стоимость транспортных затрат найденного плана составляет:

$$F_1(\bar{X}) = 675 \cdot 21 + 285 \cdot 34 + 1675 \cdot 17 + 1085 \cdot 47 + 1290 \cdot 15 + 1260 \cdot 17 = 144105$$

проверим найденный план на оптимальность методом потенциалов:

Метод “потенциалов”

Для поиска оптимального значения необходимо использовать метод потенциалов. Необходимое условие в этом методе - наличие любого допустимого решения (найденное любым из ранее рассмотренных способов).

Допустим, что перевозчик получает плату U_i за вывоз единицы груза из каждого пункта отправления b_i и плату V_j за доставку единицы груза в каждый пункт назначения A_j . Назовем сумму платежей $S_{ij} = V_j + U_i$ **псевдостоимостью**. (V_j, U_i - это не является фактической объективно обусловленной ценой, а только потенциалом цены). И если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0 \\ \Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0 \end{cases} \text{ то система потенциальна, и найденный план является} \\ \text{ОПТИМАЛЬНЫМ.}$$

Проверим на потенциальность план полученный методом «минимального тарифа»

						Значения потенциала
		V1	V2	V3	V4	
		1290	1545	1675	1760	
U1	675	32	19	47	21	0
U2	3045	19	34	17	47	26
U3	2550	15	17	23	19	9
		1290	1260			
Значение потенциалов		6	8	-9	21	

Для данного плана рассчитаем условия потенциальности, для этого заполним таблицу:

Занятые ячейки $S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0$	Свободные ячейки $\Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0$
$U_1 + V_4 = 21$ $U_2 + V_2 = 34$ $U_2 + V_3 = 17$ $U_2 + V_4 = 47$ $U_3 + V_1 = 15$ $U_3 + V_2 = 17$	$\Delta_{1,1} = c_{1,1} - (u_1 + v_1)$ $\Delta_{1,2} = c_{1,2} - (u_1 + v_2)$ $\Delta_{1,3} = c_{1,3} - (u_1 + v_3)$ $\Delta_{2,1} = c_{2,1} - (u_2 + v_1)$ $\Delta_{3,3} = c_{3,3} - (u_3 + v_3)$ $\Delta_{3,4} = c_{3,4} - (u_3 + v_4)$

Найдем чему равны потенциалы. Предполагаем $U_1 = 0$

Занятые ячейки $S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0$	Свободные ячейки $\Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0$
$U_1 = 0$ $V_4 = 21$ $U_2 = 26$ $V_2 = 8$ $V_3 = -9$ $U_3 = 9$ $V_1 = 6$	$\Delta_{1,1} = 32 - (0 + 6) = 26 > 0$ $\Delta_{1,2} = 19 - (0 + 8) = 11 > 0$ $\Delta_{1,3} = 47 - (0 - 9) = 56 > 0$ $\Delta_{2,1} = 19 - (26 + 6) = -13 < 0$ $\Delta_{3,3} = 23 - (9 - 9) = 23 > 0$ $\Delta_{3,4} = 19 - (9 + 21) = -11 < 0$

В 2-х ячейках происходит нарушение потенциальности. План не оптимальный и нуждается в улучшении. Улучшаем план через ту ячейку в которой нарушение потенциальности больше всего

$\text{Min}\{-13; -11\} = -13$ соответствует ячейке (2;1)

Для ячейки (2,1) составим цепочку из заполненных ячеек (см. таблицу).

Совершая обход по цепи помечаем поочередно ячейки, начиная с пустой знаками „+” и “-”

		V1	V2	V3	V4
		1290	1545	1675	1760
U1	675	32	19	47	21
					675
U2	3045	19	34	17	47
			285	1675	1085
U3	2550	15	17	23	19
		1290	1260		

Среди ячеек помеченных «-» находим наименьшую перевозку $\Omega = \min\{285; 1290\} = 285$

Улучшаем план следующим образом:

$$X_{ij} = \begin{cases} X_{ij}^+ + \Omega \\ X_{ij}^- - \Omega \\ X_{ij} \end{cases}$$

		V1	V2	V3	V4	Значения
		1290	1545	1675	1760	потенциала
U1	675	32	19	47	21	0
					675	
U2	3045	19	34	17	47	26
		285		1675	1085	
U3	2550	15	17	23	19	22
		1005	1545			
Значение потенциалов		-7	-5	-9	21	

Стоимость найденного плана:

$$F_2(\bar{X}) = 675 * 21 + 285 * 19 + 1675 * 17 + 1085 * 47 + 1005 * 15 + 1545 * 17 = 140400$$

Как видим план улучшился стоимость снизилась

$$F_1 > F_2 \quad 144105 > 140400$$

Проверяем найденный план на потенциальность:

Найдем чему равны потенциалы. Предполагаем $U_1=0$

Занятые ячейки $S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0$		Свободные ячейки $\Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0$	
	$U_1=0$ $V_2=-5$ $U_2=26$ $V_1=-7$ $V_3=-9$ $U_3=22$ $V_4=21$		$\Delta_{1,1} = 32 - (0-7) = 38 > 0$ $\Delta_{1,2} = 19 - (0-5) = 24 > 0$ $\Delta_{1,3} = 47 - (0-9) = 56 > 0$ $\Delta_{2,2} = 34 - (26-5) = 13 > 0$ $\Delta_{3,3} = 23 - (22-9) = 10 > 0$ $\Delta_{3,4} = 19 - (22+21) = \underline{\underline{-26 < 0}}$

План все еще не оптимальный, так как происходит нарушение в одной ячейке.

В ячейке (3;4)

. Улучшаем план:

		V1	V2	V3	V4	
		1290	1545	1675	1760	
U1	675	32	19	47	21	675
U2	3045	19	34	17	47	1085
U3	2550	15	17	23	19	
		+	← 285	1675	↑ -	+
		-	1005	1545		

Среди ячеек помеченных «-» находим наименьшую перевозку $\Omega = \min\{1005; 1085\} = 1005$

		V1	V2	V3	V4	Значения
		1290	1545	1675	1760	потенциала
U1	675	32	19	47	21	0
U2	3045	19	34	17	47	26
U3	2550	15	17	23	19	-2
		1290	1545	1675	1005	
Значение потенциалов		-7	19	-9	21	

Стоимость нового плана:

$$F_3(\bar{X}) = 675 * 21 + 1290 * 19 + 1675 * 17 + 80 * 47 + 1545 * 17 + 1005 * 19 = 116280$$

Как видим план улучшился стоимость снизилась

$$F_1 > F_2 > F_3 \quad 144105 > 140400 > 116280$$

Проверяем найденный план на потенциальность:

Скачано с сайта www.matpom.narod.ru
Исключительно для ознакомительной цели.

Найдем чему равны потенциалы. Предполагаем $U_1=0$

Занятые ячейки $S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0$		Свободные ячейки $\Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0$	
$U_1=0$ $V_2=19$ $U_2=26$ $V_1=-7$ $V_3=-9$ $U_3=-2$ $V_4=21$		$\Delta_{1,1} = 32 - (0-7) = 39 > 0$ $\Delta_{1,2} = 19 - (0+19) = 0 > 0$ $\Delta_{1,3} = 47 - (0-9) = 56 > 0$ $\Delta_{2,2} = 34 - (26+19) = -11 < 0$ $\Delta_{3,1} = 15 - (-2-7) = 24 > 0$ $\Delta_{3,3} = 23 - (-2-9) = 34 > 0$	

План все еще не оптимальный. Улучшаем план через ячейку (2; 2)

		V1	V2	V3	V4
		1290	1545	1675	1760
U1	675	32	19	47	21
U2	3045	19	34	17	47
U3	2550	15	17	23	19
		1290	1545	1675	1760

\leftarrow (2,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (3,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,4) \rightarrow (1,4) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,1)

Среди ячеек помеченных «-» находим наименьшую перевозку $\Omega = \min\{80; 1545\} = 80$

		V1	V2	V3	V4	Значения потенциала
		1290	1545	1675	1760	
U1	675	32	19	47	21	0
U2	3045	19	34	17	47	15
U3	2550	15	17	23	19	-2
		1290	1545	1675	1760	
Значение потенциалов		4	19	2	21	

Стоимость нового плана:

$$F_4(\bar{X}) = 675 \cdot 21 + 1290 \cdot 19 + 80 \cdot 34 + 1675 \cdot 17 + 1465 \cdot 17 + 1085 \cdot 19 = 115400$$

Как видим план улучшился стоимость снизилась

$$F_1 > F_2 > F_3 > F_4 \quad 144105 > 140400 > 116280 > 115400$$

Проверяем найденный план на потенциальность:

Найдем чему равны потенциалы. Предполагаем $U_1=0$

Скачано с сайта www.matpom.narod.ru
Исключительно для ознакомительной цели.

Занятые ячейки $S_{ij} = C_{ij}, x_{ij} > 0$	Свободные ячейки $\Delta_{ij} = C_{ij} - S_{ij} > 0, x_{ij} = 0$
$U_1 = 0$ $V_2 = 19$ $U_2 = 15$ $V_1 = 4$ $V_3 = 2$ $U_3 = -2$ $V_4 = 21$	$\Delta_{1,1} = 32 - (0+4) = 28 > 0$ $\Delta_{1,2} = 19 - (0+19) = 0 > 0$ $\Delta_{1,3} = 47 - (0+2) = 45 > 0$ $\Delta_{2,4} = 47 - (15+21) = 11 > 0$ $\Delta_{3,1} = 15 - (-2+4) = 13 > 0$ $\Delta_{3,3} = 23 - (-2+2) = 23 > 0$

Так как все оценки пустых ячеек > 0 , то условие потенциальности выполняется и последний найденный план является оптимальным.

Минимальная стоимость доставки груза

$$F^*(X) = 115400$$